

# Cœlum Australe

---

Jornal Pessoal de Astronomia, Física e Matemática - Produzido por Irineu Gomes Varella

---

Criado em 1995 – Retomado em Junho de 2012 – Ano III – Nº 021 - Junho de 2012

---

## REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA - I

Prof. Irineu Gomes Varella

© 2000 - Direitos autorais reservados - Proibida a reprodução.

### 1 - INTRODUÇÃO

A radiação proveniente dos corpos celestes, antes de atingir um observador ou um instrumento de observação situado na superfície terrestre, atravessa a camada de ar da atmosfera. A radiação que inicialmente propagava-se em um meio distinto do ar, com densidade praticamente nula, ao penetrar na atmosfera sofre refração.

O estudo desse fenômeno é bastante complexo face aos conhecimentos ainda reduzidos das condições atmosféricas e de não podermos acompanhá-lo em sua extensão. Para a sua descrição torna-se necessário a adoção de um modelo para a atmosfera terrestre. Entre muitos utilizados vamos adotar, em um primeiro momento, o modelo de Cassini que consiste em se admitir a atmosfera homogênea, isto é, com densidade constante em todos os seus pontos e de altura determinada ( $h$ ) e praticamente desprezível em relação ao raio da Terra ( $\rho$ ). Vamos admitir, também, que a Terra possui a forma esférica.

### 2 - DESCRIÇÃO DO FENÔMENO

Consideremos um ponto  $P$  da superfície terrestre onde esteja localizado um observador,  $O$  o centro da Terra e  $OZ$  a vertical desse lugar (fig.1). Os raios de luz provenientes de uma estrela  $E$  atingem o limite superior da atmosfera em  $Q$  e chegam ao observador em  $P$  percorrendo, na atmosfera, o trajeto  $QP$ .

A distância zenital observada dessa estrela será o ângulo  $ZPQ = z_o$  ao passo que a distância zenital topocêntrica  $z_t$  está representada pelo ângulo entre a vertical do lugar  $PZ$  e a direção  $PE$  que seria seguida pelos raios luminosos se não houvesse atmosfera. Dessa forma, o observador em  $P$  verá a estrela em  $E'$ , com distância zenital  $z_o < z_t$ . A diferença entre as duas distâncias zenitais anteriormente mencionadas define o ângulo  $R$  chamado de *ângulo de refração atmosférica*, ou simplesmente *refração atmosférica*:

$$R = z_t - z_o$$

(1)

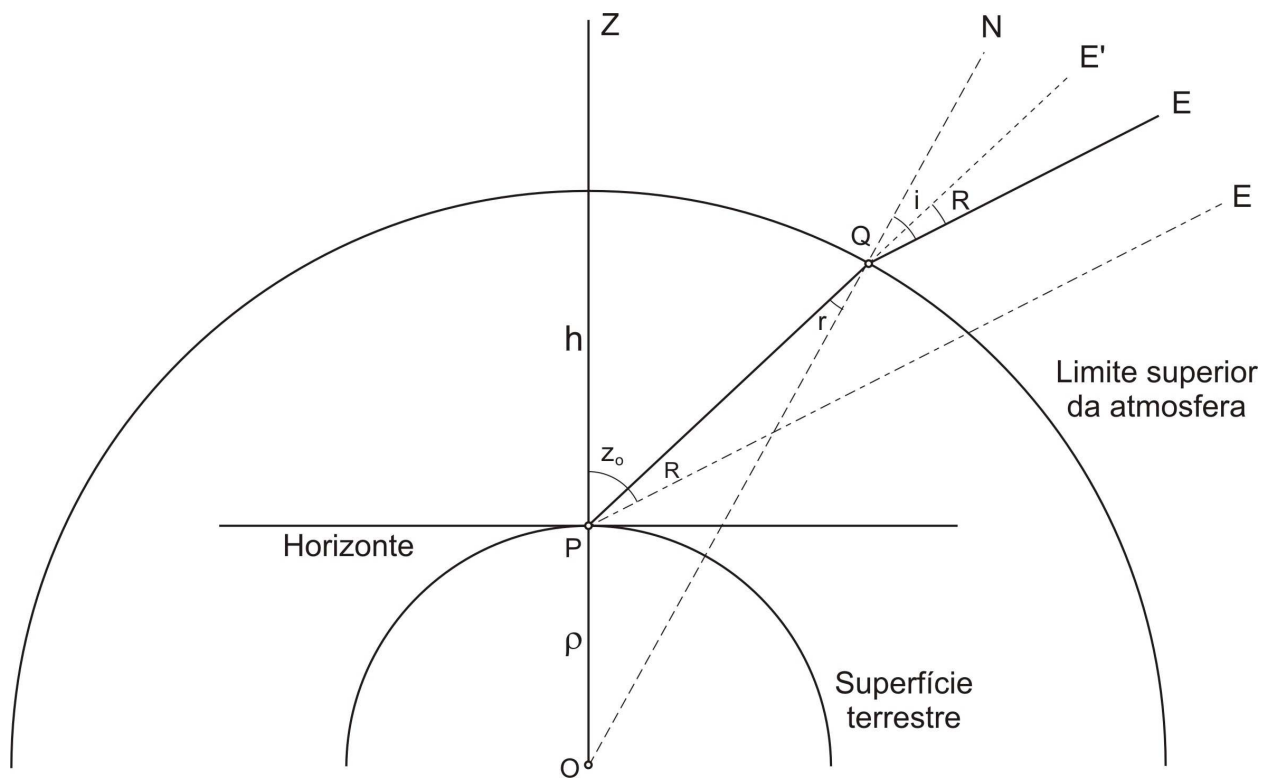


Fig. 1 - Desvio sofrido pelos raios luminosos de um astro na atmosfera terrestre.

O ângulo R é, também, a diferença entre o ângulo de incidência (  $i$  ) e o ângulo de refração (  $r$  ):

a) ângulo de incidência =  $i = NQE$

b) ângulo de refração =  $r = PQO$

A lei de Snell-Descartes permite escrever:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{\text{ar}}$$

$$\text{ou } \text{sen } i = n_{\text{ar}} \text{sen } r$$

onde  $n_{\text{ar}}$  é o índice de refração do ar.

Como  $i = r + R$ , segue-se que:

$$\text{sen } i = \text{sen } ( r + R ) = n_{\text{ar}} \text{sen } r$$

ou, ainda,

$$\text{sen } r \cdot \cos R + \text{sen } R \cdot \cos r = n_{\text{ar}} \text{sen } r$$

Sendo R um ângulo muito pequeno, podemos admitir que  $\cos R \approx 1$  e que  $\sin R \approx R_{rd}$ . Assim, podemos reescrever a expressão anterior, como:

$$\sin r + R_{rd} \cos r = n_{ar} \sin r$$

$$\boxed{R_{rd} = (n_{ar} - 1) \tan r} \quad (2)$$

Do triângulo PQO, obtemos pela aplicação da lei dos senos:

$$\frac{\sin r}{\rho} = \frac{\sin(180^\circ - z_o)}{\rho + h} = \frac{\sin z_o}{\rho + h}$$

E assim, temos ainda:

$$\sin r = \frac{\rho}{\rho + h} \sin z_o = \frac{\sin z_o}{1 + h/\rho} = \frac{\sin z_o}{1 + \alpha} \quad (3)$$

na qual, evidentemente,  $\alpha = h/\rho$ . Como

$$\tan r = \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}}$$

substituindo-se o valor de  $\sin r$  dado por (3), vem:

$$\tan r = \frac{\frac{\sin z_o}{1 + \alpha}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z_o}{(1 + \alpha)^2}}} = \frac{\sin z_o}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 - \sin^2 z_o}} = \frac{\sin z_o}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \sin^2 z_o}}$$

$$\tan r = \frac{\sin z_o}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + \cos^2 z_o}} = \frac{\sin z_o}{\sqrt{\cos^2 z_o \left( \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{\cos^2 z_o} + 1 \right)}}$$

E, finalmente,

$$\boxed{\tan r = \tan z_o \left[ 1 + (\alpha^2 + 2\alpha) \sec^2 z_o \right]^{-1/2}} \quad (4)$$

Como h é pequeno comparado com  $\rho$ , isto é,  $\alpha = h/\rho \ll 1$ , podemos desprezar o valor de  $\alpha^2 = (h/\rho)^2$ , pois  $\alpha^2 < \alpha$ . Desenvolvendo o colchete resultante em série e tomando-se apenas os dois primeiros termos, obteremos:

$$\left[1 + 2\alpha \sec^2 z_o\right]^{1/2} = 1 - \alpha \sec^2 z_o$$

A expressão (4) torna-se então,

$$\tan r = \tan z_o (1 - \alpha \sec^2 z_o) = \tan z_o - \alpha \tan z_o (1 + \tan^2 z_o)$$

$$\boxed{\tan r = (1 - \alpha) \tan z_o - \alpha \tan^3 z_o} \tag{5}$$

Substituindo-se (5) em (2), vem:

$$R_{rd} = (n_{ar} - 1) [(1 - \alpha) \tan z_o - \alpha \tan^3 z_o]$$

$$R_{rd} = (n_{ar} - 1) (1 - \alpha) \tan z_o - (n_{ar} - 1) \alpha \tan^3 z_o$$

Transformando-se de radianos para segundos de arco, obtemos:

$$R'' = 206.265'' (n_{ar} - 1) (1 - \alpha) \tan z_o - 206.265'' (n_{ar} - 1) \alpha \tan^3 z_o$$

Colocando-se agora:

$$206.265'' (n_{ar} - 1) (1 - \alpha) = A \quad \text{e}$$

$$- 206.265'' (n_{ar} - 1) \alpha = B \quad \text{teremos:}$$

$$\boxed{R'' = A \tan z_o + B \tan^3 z_o} \tag{6}$$

Os valores de A e B podem ser determinados pelo método dos mínimos quadrados a partir de distâncias zenitais de estrelas obtidas quando de suas passagens meridianas. Esses coeficientes não são constantes variando com as condições atmosféricas (pressão e temperatura). Para a temperatura de 0°C e 760 mmHg de pressão, seus valores são: A = 60,29'' e B = -0,07''. Os valores do ângulo de refração (R) obtidos com o uso desses coeficientes são denominados *refração média* (R''<sub>m</sub>):

$$\boxed{R''_m = 60,29'' \tan z_o - 0,07'' \tan^3 z_o} \tag{7}$$

Para as distâncias zenitais menores que 45° podemos, na prática, desprezar o termo Btan<sup>3</sup>z<sub>o</sub> que se torna muito pequeno. Para valores superiores a 45° pode-se utilizar (7) com certa segurança até z<sub>o</sub> ≈ 75°. Para distâncias zenitais superiores a esse valor existem tabelas especiais calculadas por expressões mais rigorosas.

Os valores da refração média devem ser corrigidos para a temperatura (em °C) e para a pressão (em mmHg) registradas no instante da observação, obtendo-se a refração corrigida ( $R''_c$ ):

$$R''_c = R''_m \frac{P}{760} \frac{273}{t + 273} \quad (8)$$

Obtido o valor da refração corrigida, calcula-se a distância zenital topocêntrica  $z_t$  pela expressão:

$$z_t = z_o + R''_c \quad (9)$$

### 3 - EXEMPLOS E APLICAÇÕES

**Exemplo 3.1** - Observou-se uma estrela com  $z_o = 37^\circ 24' 48''$ , sendo que, no instante da observação, a pressão atmosférica era de 720 mmHg e a temperatura de 20° C. Obter a distância zenital topocêntrica dessa estrela.

Como  $z_o < 45^\circ$  podemos desprezar o termo  $B \tan^3 z_o$  e calcular a refração média por:

$$R''_m = 60,29'' \tan z_o = 60,29'' \tan (37^\circ 24' 48'') = 46''$$

Como  $R''_m$  é dado para as condições de 0°C de temperatura e 760 mmHg de pressão, devemos corrigir o valor calculado acima para as condições de pressão e temperatura do instante da observação:

$$R''_c = 46'' \frac{720}{760} \frac{273}{20 + 273} = 41''$$

E, assim, teremos  $z_t = 37^\circ 24' 48'' + 41'' = 37^\circ 25' 29''$

**Exemplo 3.2** - Calcular a distância zenital topocêntrica de uma estrela observada com  $z_o = 68^\circ 17' 08''$ , nas condições  $P = 740$  mmHg e  $t = 30^\circ$  C.

Para as refrações média e corrigida teremos:

$$R''_m = 60,29'' \tan (68^\circ 17' 08'') - 0,07'' \tan^3 (68^\circ 17' 08'') = 2' 30''$$

$$R''_c = 2' 30'' \frac{740}{760} \frac{273}{30 + 273} = 2' 11''$$

$$z_t = 68^\circ 17' 08'' + 2' 11'' = 68^\circ 19' 19''$$

#### 4 - REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA AO NÍVEL DO HORIZONTE

Os valores do ângulo  $R''$  vão se tornando cada vez maiores à medida que a distância zenital cresce. O gráfico abaixo ilustra o crescimento de  $R''$  com o aumento da distância zenital observada  $z_o$  :

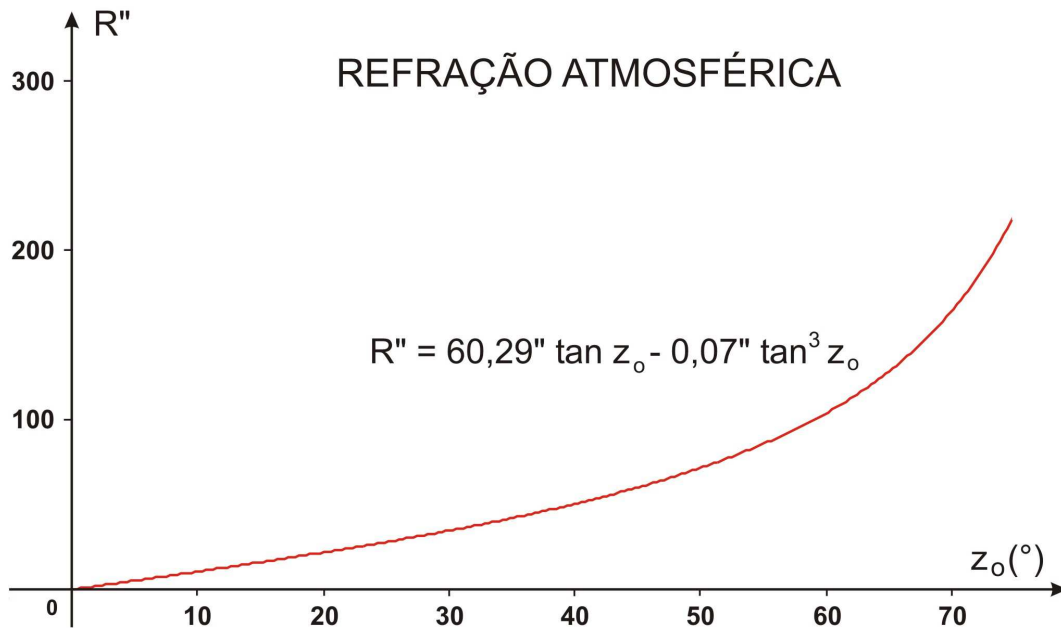


Fig. 2 - Gráfico da refração média em função da distância zenital observada.

Quando  $z_o$  é próximo de  $90^{\circ}$  as fórmulas anteriormente deduzidas não fornecem resultados compatíveis com as observações. Se  $z_o = 90^{\circ}$  elas nem mesmo podem ser utilizadas pois  $\tan 90^{\circ}$  não está definida. Utilizando-se uma teoria mais completa para a refração podemos obter, para a refração média ao nível do horizonte, o valor  $R_m = 34'$ . O alto valor de  $R_m$  nessas circunstâncias faz com que os astros observados nas proximidades do horizonte (com  $z_o \approx 90^{\circ}$ ) tenham, na realidade  $z_t \approx 90^{\circ} 34'$ , ou seja, encontram-se mais de meio grau abaixo do horizonte.

Tal fato torna-se de grande importância quando se procede ao cálculo dos horários do nascer e do ocaso dos astros. A distância zenital a ser utilizada nessa situação deve ser  $z_t = 90^{\circ} 34'$ , com as correções da paralaxe horizontal e do semi-diâmetro do astro, se estes apresentarem valores consideráveis. Para o Sol e para a Lua que possuem diâmetros aparentes da ordem de  $32'$  (semi-diâmetros de  $16'$ ) o efeito da refração quando se encontram próximos do horizonte é da mesma ordem de grandeza de seus tamanhos aparentes.

Desta forma, quando o Sol (ou a Lua) é visto surgindo no horizonte leste, ele ainda se encontra abaixo daquela linha. Situação inteiramente análoga acontece no ocaso: quando o Sol é visto se pondo a oeste, na realidade já cruzou aquela linha (fig.3).

Para o cálculo da insolação em determinado local da Terra, isto é, o período de tempo que determinada localidade recebe de luz solar em dada época do ano, os efeitos da refração atmosférica devem ser sempre incluídos pois, no total diário, contribuem com cerca de 4 minutos a mais de luz.

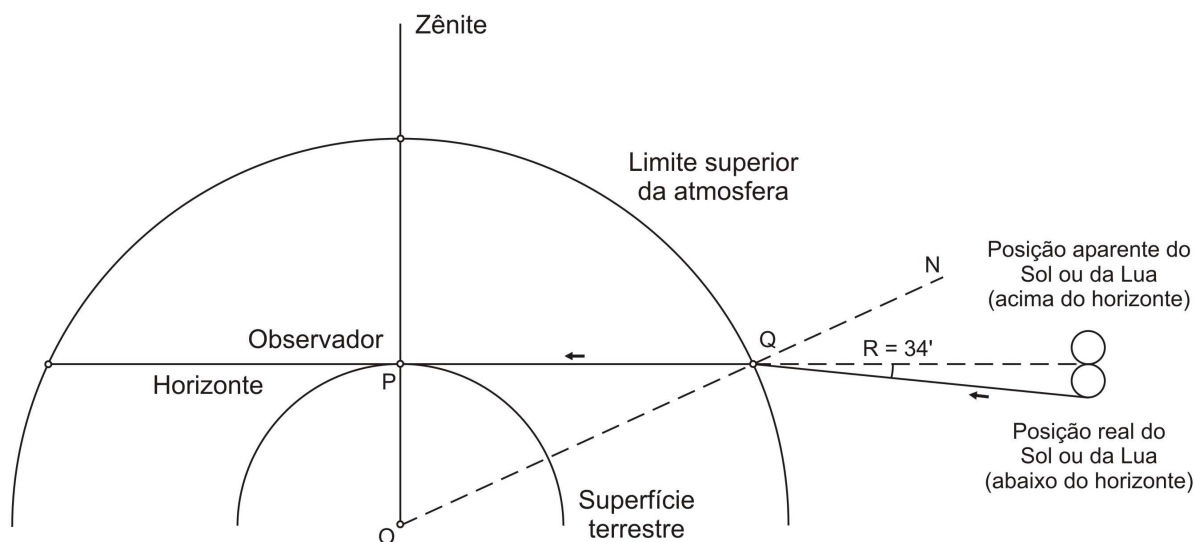


Fig.3 – Os efeitos da refração atmosférica ao nível do horizonte.

É também a refração produzida pela atmosfera terrestre a responsável pelo "achatamento" observado no disco solar (fig.4) quando ele se encontra próximo ao horizonte. A borda inferior do disco solar (a mais próxima do horizonte) tem maior distância zenital que a borda superior. Como a refração ao nível do horizonte depende fortemente do valor da distância zenital, a borda inferior sofre um desvio significativamente maior que a superior, provocando o aspecto que com frequência observamos.

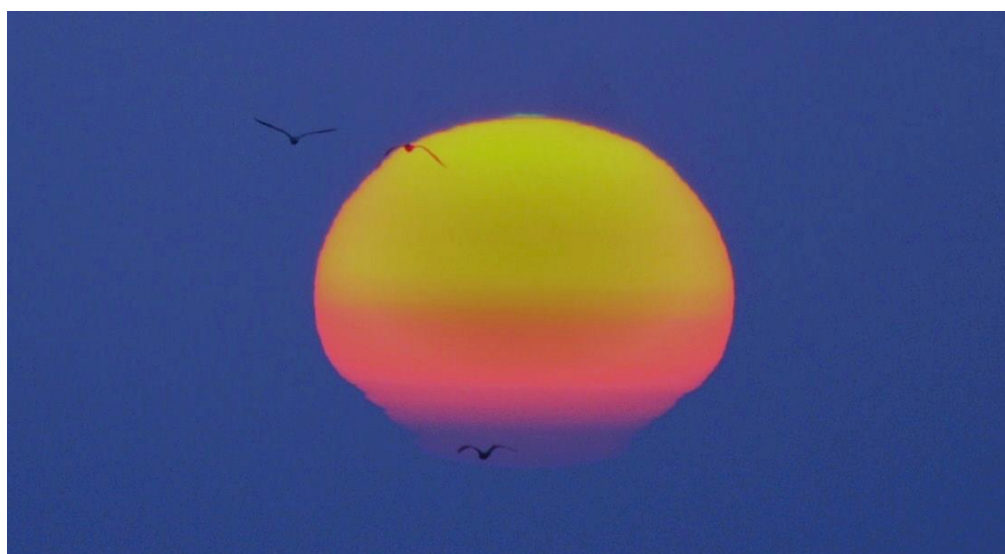


Fig. 4 - Efeito da refração sobre o disco solar nas proximidades do horizonte.

## 5 - FÓRMULA DE BENNETT

Há outras expressões para o cálculo da refração atmosférica que podem ser encontradas na literatura astronômica. Uma delas, bastante interessante pela sua simplicidade, é a fórmula empírica devida a G.G. Bennett (1982)<sup>1</sup>:

A fórmula de Bennett permite calcular, com boa precisão, o valor da refração média para todos os valores da altura observada ( $h_o = 90^\circ - z_o$ ) de um astro entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ :

$$R'_m = \frac{1}{\tan \left( h_o + \frac{7,31}{h_o + 4,4} \right)} \quad (10)$$

A refração média obtida pela fórmula anterior encontra-se expressa em *minutos de arco* e vale para as condições de  $P = 1.010$  milibares e  $t = 10^\circ\text{C}$ . Nessas condições, a expressão (10) fornece, para a refração ao nível do horizonte ( $h_o = 0^\circ$ ), o valor  $R'_m = 34' 28''$ . Para outros valores da pressão (em milibares) e da temperatura (em  $^\circ\text{C}$ ), a refração média, dada em (10), pode ser corrigida pela expressão:

$$R'_c = R'_m \frac{P}{1010} \frac{283}{t + 273} \quad (11)$$

A fórmula de Bennett, no entanto, não apresenta resultado correto para a altura  $h_o = 90^\circ$  ( $z_o = 0^\circ$ ). Nessa situação, sendo a incidência dos raios luminosos normal à camada atmosférica devemos ter  $R_m = 0$ , como as expressões apresentadas no texto fornecem. Para esse valor a fórmula de Bennett indica  $R_m = -0,08''$ . Para os demais valores das alturas observadas, apresenta precisão de  $0,07'$  (cerca de  $4''$ ), segundo o seu autor.

## 6 - TÁBUAS DE REFRAÇÃO

De aplicação prática imediata são as tabelas publicadas nos anuários astronômicos do Observatório Nacional e do Instituto Astronômico da USP (até 1996), que fornecem os valores da refração média para diversos valores da distância zenital observada e tabelas que permitem corrigir o valor anterior de acordo com a pressão e a temperatura registradas no instante da observação.

A tabela I (pag.9) foi calculada para os mesmos valores da distância zenital observada ( $z_o$ ) apresentados nas tábuas de refração do Anuário Astronômico do IAG-USP, utilizando-se a expressão (7) para a refração média. Os valores calculados mostram-se em perfeito acordo com os daquela tabela, exceto por pequenas diferenças ocasionais, da ordem de  $1''$ , devidas aos arredondamentos.

---

<sup>1</sup> BENNETT, G. G. *The calculation of astronomical refraction in marine navigation*. Journal of Navigation, Vol. 35, p. 255 – 259, 1982



**TABELA I - REFRAÇÃO MÉDIA**

$z_0$	$R_m$	$z_0$	$R_m$	$z_0$	$R_m$	$z_0$	$R_m$
0°	0"	49°	1' 09"	69° 00'	2' 35"	75° 00'	3' 41"
5°	5"	50°	1' 12"	69° 30'	2' 40"	75° 10'	3' 44"
10°	11"	51°	1' 14"	70° 00'	2' 44"	75° 20'	3' 46"
15°	16"	52°	1' 17"	70° 10'	2' 45"	75° 30'	3' 49"
20°	22"	53°	1' 20"	70° 20'	2' 47"	75° 40'	3' 51"
21°	23"	54°	1' 23"	70° 30'	2' 48"	75° 50'	3' 54"
22°	24"	55°	1' 26"	70° 40'	2' 50"	76° 00'	3' 57"
23°	26"	56° 00'	1' 29"	70° 50'	2' 51"	76° 10'	4' 00"
24°	27"	56° 30'	1' 31"	71° 00'	2' 53"	76° 20'	4' 03"
25°	28"	57° 00'	1' 32"	71° 10'	2' 55"	76° 30'	4' 06"
26°	29"	57° 30'	1' 34"	71° 20'	2' 56"	76° 40'	4' 09"
27°	31"	58° 00'	1' 36"	71° 30'	2' 58"	76° 50'	4' 12"
28°	32"	58° 30'	1' 38"	71° 40'	3' 00"	77° 00'	4' 15"
29°	33"	59° 00'	1' 40"	71° 50'	3' 01"	77° 10'	4' 18"
30°	35"	59° 30'	1' 42"	72° 00'	3' 03"	77° 20'	4' 22"
31°	36"	60° 00'	1' 44"	72° 10'	3' 05"	77° 30'	4' 25"
32°	38"	60° 30'	1' 46"	72° 20'	3' 07"	77° 40'	4' 29"
33°	39"	61° 00'	1' 48"	72° 30'	3' 09"	77° 50'	4' 33"
34°	41"	61° 30'	1' 50"	72° 40'	3' 10"	78° 00'	4' 36"
35°	42"	62° 00'	1' 53"	72° 50'	3' 12"	78° 10'	4' 40"
36°	44"	62° 30'	1' 55"	73° 00'	3' 14"	78° 20'	4' 44"
37°	45"	63° 00'	1' 57"	73° 10'	3' 16"	78° 30'	4' 48"
38°	47"	63° 30'	2' 00"	73° 20'	3' 18"	78° 40'	4' 52"
39°	49"	64° 00'	2' 03"	73° 30'	3' 20"	78° 50'	4' 56"
40°	51"	64° 30'	2' 05"	73° 40'	3' 23"	79° 00'	5' 01"
41°	52"	65° 00'	2' 08"	73° 50'	3' 25"	79° 10'	5' 05"
42°	54"	65° 30'	2' 11"	74° 00'	3' 27"	79° 20'	5' 10"
43°	56"	66° 00'	2' 14"	74° 10'	3' 29"	79° 30'	5' 15"
44°	58"	66° 30'	2' 17"	74° 20'	3' 31"	79° 40'	5' 20"
45°	60"	67° 00'	2' 21"	74° 30'	3' 34"	79° 50'	5' 25"
46°	62"	67° 30'	2' 24"	74° 40'	3' 36"	80° 00'	5' 30"
47°	64"	68° 00'	2' 28"	74° 50'	3' 39"		
48°	67"	68° 30'	2' 32"	75° 00'	3' 41"		<b>Refração Média</b>