Cœlum Australe

Jornal Pessoal de Astronomia, Física e Matemática - Produzido por Irineu Gomes Varella

Criado em 1995 – Retomado em Junho de 2012 – Ano III – Nº 024 - Setembro de 2012

ÓRBITAS PLANETÁRIAS E LEIS DE KEPLER

Prof. Irineu Gomes Varella

Todos os planetas do Sistema Solar movimentam-se obedecendo às chamadas leis de Kepler. No início do século XVII, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) analisando uma grande quantidade de observações astronômicas efetuadas pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), em especial das posições do planeta Marte no céu, concluiu, empiricamente, três leis do movimento planetário, chamadas leis de Kepler.

1ª Lei ou LEI DAS ÓRBITAS (1609) : A órbita de cada planeta ao redor do Sol é uma elipse, situando-se o Sol, em um de seus focos.

A elípse é uma curva plana e fechada que pode ser facilmente construída. O processo prático empregado, por exemplo, pelos jardineiros quando constroem canteiros ou jardins com a forma elíptica, permite compreender as suas propriedades básicas.

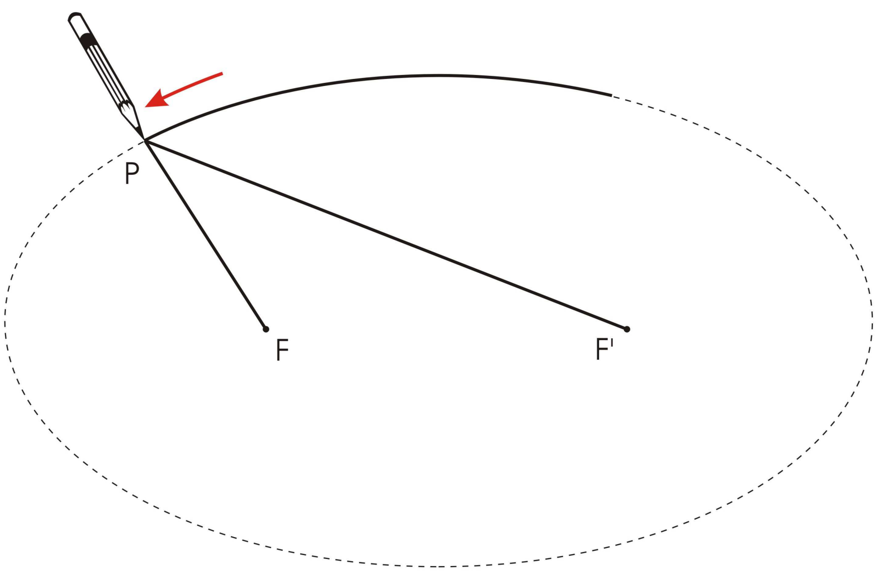

Fig. 1 - Método prático para o traçado de uma elipse

Consideremos dois pontos distintos F e F', interligados por um fio inextensível e de comprimento L, maior que a distância FF'. Esticando o fio com um lápis (fig.1) e deslizando-o pela folha de papel, ao completarmos o circuito teremos desenhado uma perfeita elipse. Imediatamente ressalta a sua propriedade fundamental: a soma das distâncias de cada ponto da elipse aos pontos F e F' é constante e igual a L (comprimento do fio). Assim, PF + PF' = L.

Uma reta que contenha os pontos F e F' interceptará a elipse nos pontos A e B. O segmento AB é denominado eixo maior da elipse (fig.2). O segmento CD da mediatriz de AB é o eixo menor. O ponto O, cruzamento dos eixos definidos anteriormente é o centro da elipse e os pontos F e F' são os seus focos. Em geral, costuma-se designar:

AO = OB = a = semi-eixo maior da elipse, de modo que AB = 2a
CO = OD = b = semi-eixo menor da elipse, de maneira que CD = 2b
FO = F'O = c = semi-distância interfocal, de modo que FF' = 2c

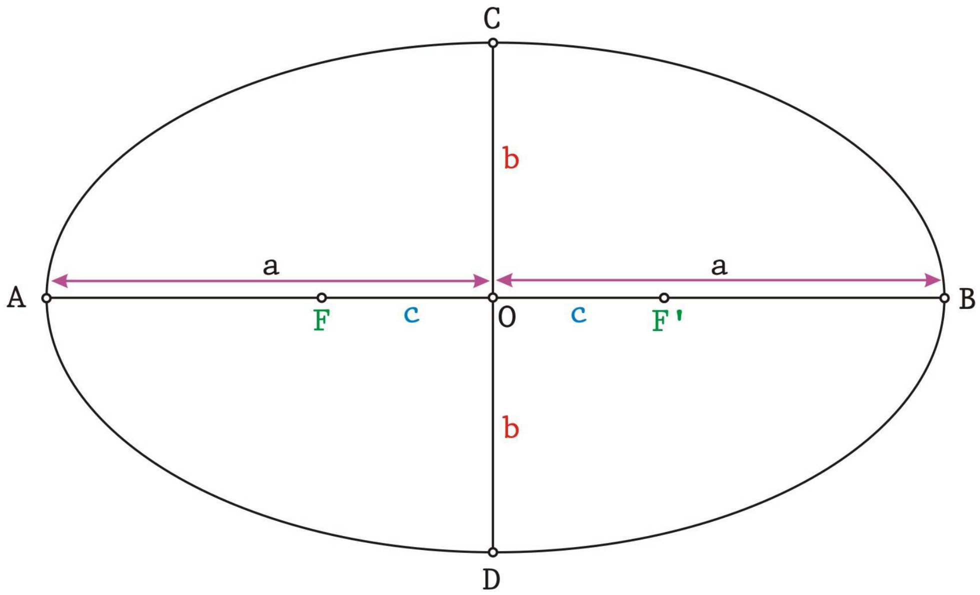

Fig. 2 - Elementos geométricos da elipse

Chama-se excentricidade de uma elipse, que se representa por ε, a relação:

$$\varepsilon = FF' / AB = 2c / 2a = c / a$$

A excentricidade representa, grosso modo, o "grau de achatamento" de uma elipse. Quanto maior for o valor de ε, mais "achatada" ela é e, quanto menor o valor de ε, mais próxima estará a elipse de uma circunferência. Quando ocorrer c = 0, que significa FO = F'O = 0, os três pontos F, F' e O coincidirão. Teremos, então a circunferência. Note que nesse caso ε = 0.

O valor da excentricidade de uma elipse está sempre compreendido entre 0 e 1, podendo eventualmente ser igual a zero (circunferência), porém, nunca igual a 1.

Todas as órbitas planetárias são elipses de pequena excentricidade, como se depreende dos dados da tabela 1. A órbita mais excêntrica é a de Plutão (hoje considerado planeta-anão) e a que mais se aproxima de uma circunferência é a do planeta Vênus.

TABELA 1 : EXCENTRICIDADES DAS ÓRBITAS PLANETÁRIAS

PLANETA	EXCENTRICIDADE	PLANETA	EXCENTRICIDADE
Mercúrio	0,205631	Júpiter	0,048494
Vênus	0,006771	Saturno	0,055509
Terra	0,016709	Urano	0,046296
Marte	0,093401	Netuno	0,008988
1.Ceres	0,07836	Plutão[1]	0,246003

O fato das órbitas planetárias serem elípticas e não circulares, implica que as distâncias dos planetas ao Sol são variáveis ao longo do tempo. O diagrama a seguir ilustra a órbita de um planeta hipotético que descreve uma órbita de grande excentricidade ao redor do Sol. Quando o planeta passa pelos pontos P e A - extremidades do eixo maior - encontra-se, respectivamente, na sua mínima e na sua máxima distância ao Sol. Os pontos P e A são chamados de *periélio* e *afélio*. Suas distâncias ao Sol, nessas ocasiões, são chamadas, respectivamente, de *distância periélica* (r_P) e *distância afélica* (r_A).

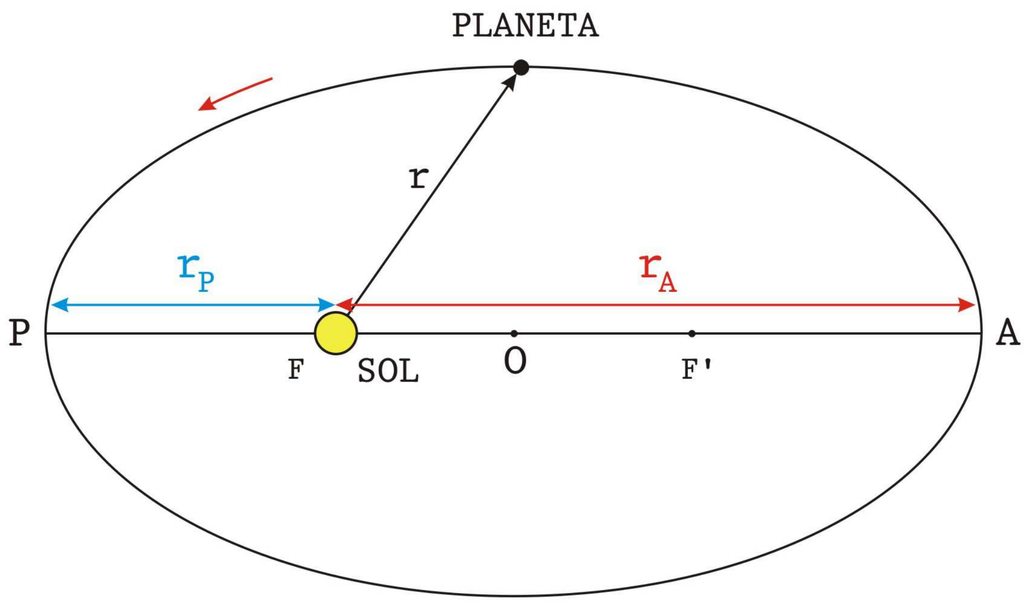

Fig. 3 - Órbita de um planeta ao redor do Sol e a variação de sua distância.

[1] Todos os valores apresentados para o planeta Plutão foram extraidos de Cohen, C.J., Hubbard, E.C., e Oesterwinter, C. - Antron. J., 72, 973 (1967).

Pode-se verificar facilmente que a média aritmética entre as distâncias periélica e afélica é igual ao semi-eixo maior da órbita:

$$r_P = PF = PO - FO = a - c \qquad r_A = FA = FO + OA = a + c$$

$$(r_P + r_A) / 2 = [(a - c) + (a + c)] / 2 = 2a / 2 = a$$

O valor do semi-eixo maior da órbita da Terra é denominado *Unidade Astronômica* (simbolo: UA ou A) e o seu valor é 149.597.870 km. Nessa unidade, os semi-eixos maiores das órbitas dos planetas, têm os seguintes valores:

TABELA 2 : SEMI-EIXOS MAIORES DAS ÓRBITAS PLANETÁRIAS

PLANETA	SEMI-EIXO (A)	PLANETA	SEMI-EIXO (A)
Mercúrio	0,3871	Júpiter	5,2028
Vênus	0,7233	Saturno	9,5388
Terra	1,0000	Urano	19,1820
Marte	1,5237	Netuno	30,0578
1.Ceres	2,7661	Plutão	39,5332

Conhecendo-se os valores do semi-eixo maior e da excentricidade da órbita de um planeta, podemos determinar as suas distâncias periélica e afélica, como segue:

$$r_P = a - c = a(1 - c/a) = a(1 - \varepsilon)$$

$$r_A = a + c = a(1 + c/a) = a(1 + \varepsilon)$$

EXEMPLO: Para a Terra, os valores de r_P e r_A são, aproximadamente:

$$r_P = a(1 - \varepsilon) = 149.597.870\,(1 - 0{,}0167) \approx 147.100.000 \text{ km}$$

$$r_A = a(1 + \varepsilon) = 149.597.870\,(1 + 0{,}0167) \approx 152.100.000 \text{ km}$$

Adotando-se um sistema de coordenadas polares com pólo no Sol e com eixo na direção Sol-periélio da órbita, orientado nesse sentido, a distância de um planeta ao Sol (r) pode ser calculada para cada posição do planeta dada pelo ângulo θ, chamado de *anomalia verdadeira*, contado a partir da direção do periélio no sentido de movimento do planeta, pela expressão:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

onde a é o semi-eixo maior da órbita e e a excentricidade. O leitor poderá verificar que na passagem periélica, θ = 0° e, portanto, r_P = a.(1 - e), enquanto que, na passagem afélica, θ = 180°, o que acarreta em r_A= a.(1 + e), como havíamos antes obtido.

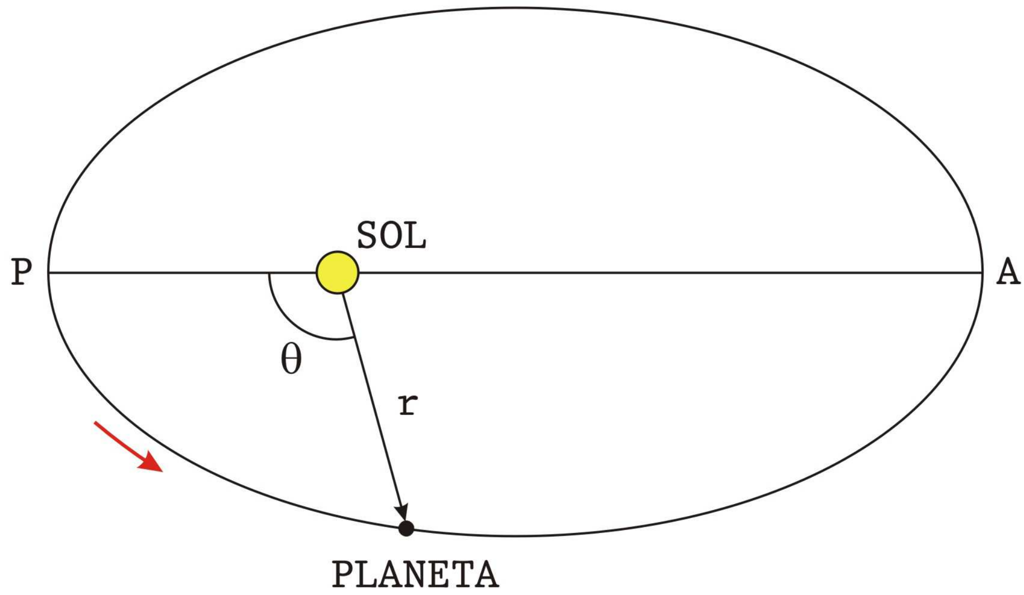

Fig. 4 - Posição de um planeta em sua órbita

2ª Lei ou LEI DAS ÁREAS (1609) : O raio vetor de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

O vetor ($\vec{r}$) com origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta é chamado de *raio vetor do planeta*. Consideremos, como na figura 5, um planeta descrevendo uma órbita ao redor do Sol. Sejam P_1, P_2, P_3 e P_4, quatro posições do planeta. Se os arcos de elipse P_1P_2 e P_3P_4 forem percorridos no mesmo intervalo de tempo, então as áreas dos triângulos P_1SP_2 e P_3SP_4 serão iguais.

Assim, se Δt = Δt' , então ΔA = ΔA'. A grandeza ΔA/Δt é chamada *velocidade areolar*. A segunda lei de Kepler afirma, então, que a velocidade areolar dos planetas é constante. Ela permite, ainda, tirar conclusões sobre a velocidade do planeta em sua órbita ao redor do Sol. Nota-se, pela figura, que tendo os triângulos P_1SP_2 e P_3SP_4 as mesmas áreas, porém alturas diferentes, segue-se que as suas bases serão diferentes também. Como a base do triângulo P_1SP_2 é maior que a base do triângulo P_3SP_4 e ambas foram percorridas no mesmo intervalo de tempo, conclui-se que o arco de elipse P_1P_2 foi percorrido com velocidade maior que o arco P_3P_4. Desta forma, quando a distância do planeta ao Sol é pequena, a sua velocidade de translação é grande e vice-versa.

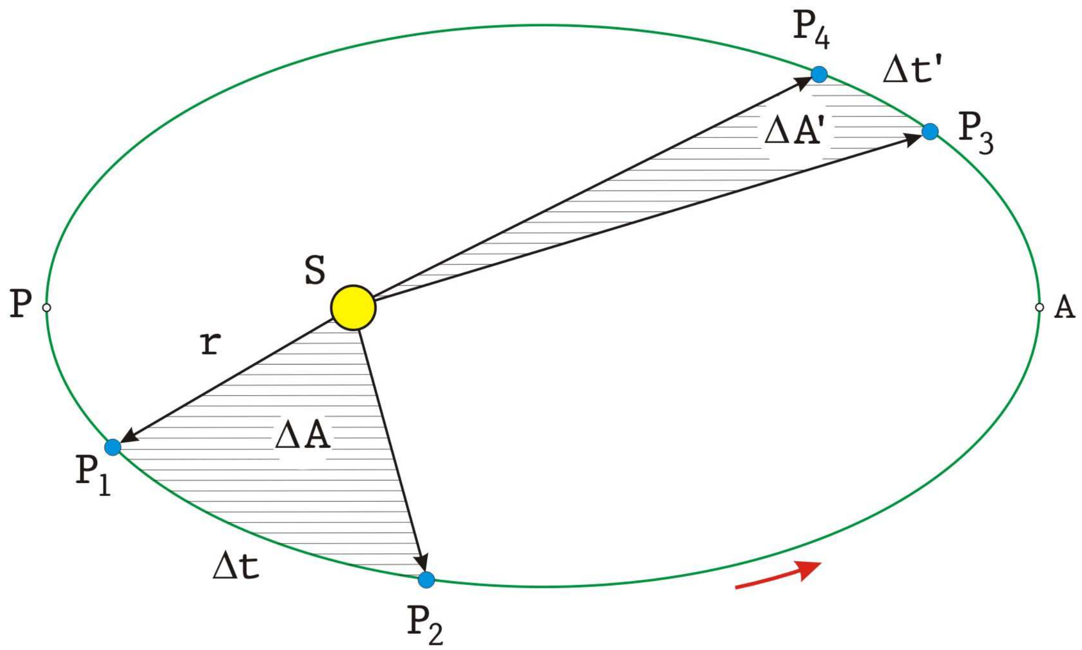

Fig. 5 - A lei das áreas.

A velocidade de translação de um planeta, em quilômetros por segundo, pode ser calculada, para cada valor da distância r (em unidades astronômicas) do planeta ao Sol, pela expressão abaixo:

$$v = 42{,}12 \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}}$$

onde a é o semi-eixo maior da órbita, em unidades astronômicas. As velocidades no periélio e no afélio estão dadas, respectivamente, por:

$$v_P = \frac{29{,}78}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad v_A = \frac{29{,}78}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

também em quilômetros por segundo e com a em unidades astronômicas.

TABELA 3 : VELOCIDADES MÁXIMAS E MÍNIMAS DOS PLANETAS

PLANETA	V_P	V_A	PLANETA	V_P	V_A
Mercúrio	58,97	38,85	Júpiter	13,71	12,44
Vênus	35,25	34,78	Saturno	10,19	9,12
Terra	30,28	29,29	Urano	7,12	6,49
Marte	26,49	21,97	Netuno	5,48	5,38
1.Ceres	19,37	16,55	Plutão	6,09	3,68

3ª Lei ou LEI HARMÔNICA (1619) : A relação entre os cubos dos semi-eixos maiores das órbitas de dois planetas quaisquer é igual à relação entre os quadrados dos seus períodos de translação ao redor do Sol.

Considerando-se a_1 e a_2 os semi-eixos maiores das órbitas de dois planetas cujos períodos de translação são, respectivamente, P_1 e P_2, podemos escrever:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{P_1^2}{P_2^2}$$

Ou ainda, se considerarmos a_1, a_2, a_3 ... a_n, os semi-eixos maiores das órbitas de n planetas ao redor do Sol e P_1, P_2, P_3, ... P_n, os seus respectivos período de translação, teremos:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} = \cdots = \frac{a_n^3}{P_n^2} = K$$

onde K é uma constante válida para todos os planetas[2]. Para dois planetas que descrevem órbitas com semi-eixos maiores a e a' e períodos P e P', respectivamente, poderemos escrever:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{a'^3}{P'^2}$$

Se um dos planetas considerados for a Terra, para a qual, a' = 1 unidade astronômica e P' = 1 ano, para o outro planeta, teremos as relações:

$$\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{P}^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad a^3 = P^2 \qquad \text{ou, ainda,} \qquad a = \sqrt[3]{P^2}$$

Assim, para um planeta qualquer, o cubo do seu semi-eixo maior, expresso em unidades astronômicas, é numericamente igual ao quadrado de seu período orbital, em anos. Foi dessa maneira que Kepler determinou as distâncias dos planetas ao Sol, partindo do conhecimento de seus períodos de translação, que podiam ser obtidos pelas observações.

Em 1687, Isaac Newton publica os *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*, no qual está a lei da gravitação universal. Através dela, Newton demonstra as três leis de Kepler. Em particular, a terceira lei de Kepler se expressa, em um sistema isolado constituído pelo Sol e por um planeta, por:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\ (M_S + M_P)}{4\pi^2}$$

---

[2] Seu valor é, na realidade, apenas aproximadamente igual para todos os planetas.

onde, M_S e M_P são, respectivamente, as massas do Sol e do planeta e G a constante de gravitação universal. O valor do segundo membro depende, portanto, da massa de cada planeta, não sendo uma constante como Kepler supôs. Na tabela 4 estão relacionados, para todos os planetas, os valores de a^3 / P^2. O leitor poderá verificar que a razão anterior não é exatamente igual para todos eles.

TABELA 4 : A TERCEIRA LEI DE KEPLER

PLANETA	a (A)	P (anos)	a^3/P^2 (A^3/ano^2)	$a^3/P^2 \times 10^{18}$ (m^3/s^2)
Mercúrio	0,3871	0,2408	1,0004	3,3629
Vênus	0,7233	0,6152	0,9998	3,3611
Terra	1,0000	1,0000	1,0000	3,3617
Marte	1,5237	1,8808	1,0000	3,3618
Júpiter	5,2028	11,8618	1,0009	3,3648
Saturno	9,5388	29,4565	1,0003	3,3626
Urano	19,1820	84,0105	1,0000	3,3618
Netuno	30,0578	164,7864	1,0001	3,3619
Plutão	39,5332	248,54	1,0002	3,3623

AS ÓRBITAS DOS CORPOS DO SISTEMA SOLAR

A forma e o tamanho das órbitas elípticas dos planetas e de outros corpos do Sistema Solar fica determinada pelo conhecimento dos valores de a e e, isto é, do semi-eixo maior (tamanho) e da excentricidade orbital (forma).

No entanto, esses valores nada nos informam sobre como as órbitas estão dispostas no espaço. Com a adoção de um sistema de referência conveniente é possivel descrever a situação das órbitas e, também, obter a posição dos corpos do sistema solar no espaço. Como plano fundamental de referência, os astrônomos adotam o plano da órbita da Terra ao redor do Sol, denominado de plano da Eclíptica.

Consideremos, como na figura 6, a órbita de um planeta ao redor do Sol, não coplanar com a órbita da Terra. A intersecção entre o plano da órbita do planeta e o plano da Eclíptica é a reta NN', chamada *linha dos nodos*. Os pontos N e N', resultantes da intersecção da órbita do planeta com o plano da órbita da Terra, são chamados, respectivamente, *nodo ascendente* e *nodo descendente*. Quando o planeta, em seu movimento orbital ao redor do Sol, passa pelo nodo ascendente (N), ele cruza o plano da órbita da Terra dirigindo-se do hemisfério sul para o hemisfério norte, determinados pelo plano da Eclíptica.

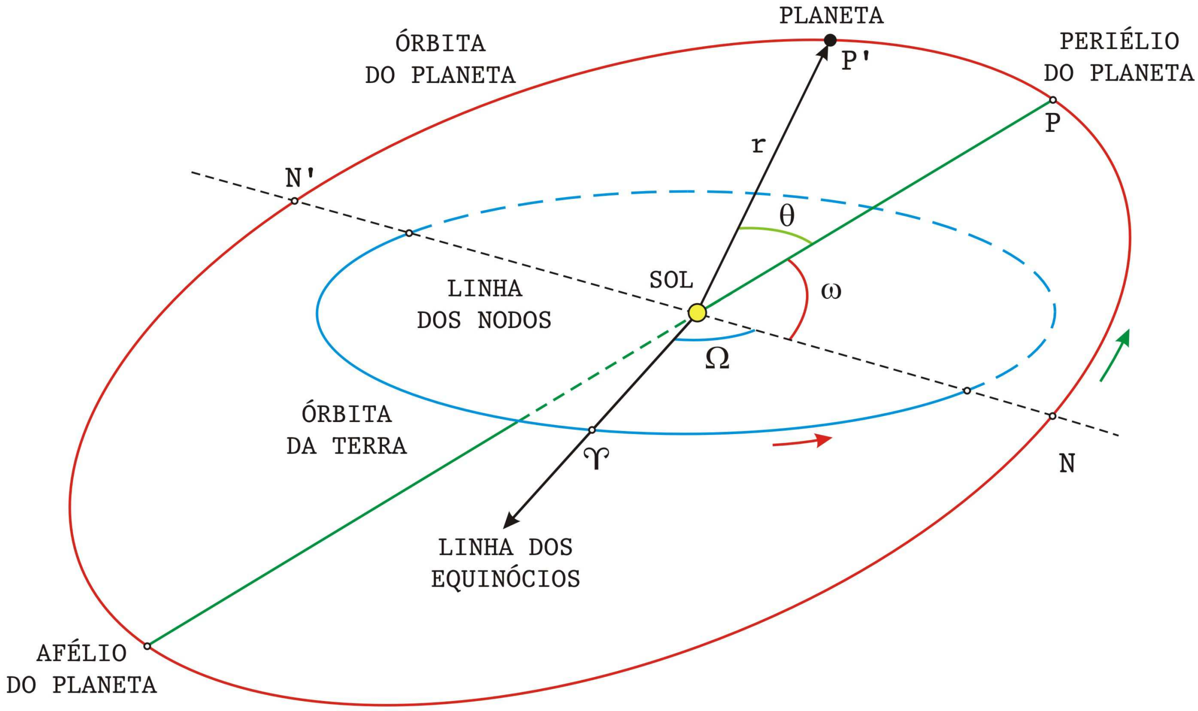

Fig. 6 - Posição de uma órbita no espaço.

A posição do plano da órbita do planeta fica determinada, no referencial adotado, por dois ângulos:

a) o ângulo diedro entre os planos considerados, chamado de *inclinação orbital* ou simplesmente *inclinação* e representado por I, e

b) pela posição da linha dos nodos, fornecida pelo ângulo Ω, entre as direções S♈ e SN, contado a partir da direção S♈ no sentido do movimento de translação da Terra, denominado *longitude do nodo ascendente*.

A orientação da órbita, em seu plano, fica determinada pelo ângulo ω, chamado de *argumento do periélio*, contado a partir da direção SN, no sentido do movimento do planeta, até a direção SP, indicando a posição do periélio do planeta. Note-se que os ângulos Ω e ω encontram-se em planos diferentes: o primeiro no plano da Eclíptica e o segundo no plano da órbita do planeta. Utiliza-se, algumas vezes, ao invés do argumento do periélio, a quantidade $\varpi = \Omega + \omega$, chamada de *longitude do periélio*. A vantagem desta última reside no fato de que ela está sempre definida, mesmo quando a inclinação orbital é nula (I = 0°), situação em que não estão definidos os ângulos Ω e ω, pois não há a linha dos nodos.

A posição de um planeta em sua órbita é determinada pelo ângulo L, chamado de *longitude do planeta na órbita*, definido por:

$$L = \Omega + \omega + \nu = \varpi + \nu$$

onde θ é a anomalia verdadeira que, como vimos, é o ângulo, situado no plano da órbita do planeta, entre as direções SP e SP' e contado no sentido de movimento do planeta ao redor do Sol. Os valores dos ângulos Ω, ω e θ são determinados pelas equações da Mecânica Celeste.

TABELA 5 : ELEMENTOS ORBITAIS DOS PLANETAS

PLANETA	I	ϖ	Ω
Mercúrio	07° 00' 18"	077° 27' 22"	048° 19' 51"
Vênus	03° 23' 41"	131° 33' 49"	076° 40' 48"
Terra	---	102° 56' 14"	---
Marte	01° 50' 59"	336° 03' 37"	049° 33' 29"
Júpiter	01° 18' 12"	014° 19' 53"	100° 27' 52"
Saturno	02° 29' 20"	093° 03' 24"	113° 39' 56"
Urano	00° 46' 24"	173° 00' 19"	074° 00' 21"
Netuno	01° 46' 12"	048° 07' 25"	131° 47' 03"
Plutão	17° 07' 22"	222° 52' 53"	109° 36' 23"

IRINEU GOMES VARELLA - Astrônomo nascido em São Paulo em 07 de setembro de 1952. É graduado em Física e em Matemática pela Universidade de São Paulo e com Pós-Graduação em Astronomia pela Universidade de São Paulo e pela Universidade Cruzeiro do Sul. Iniciou sua carreira no Planetário e Escola Municipal de Astrofísica de São Paulo em 1968, tendo sido Diretor Geral da Instituição de 1980 a 2002. Ministrou mais de uma centena de cursos e dezenas de palestras de Astronomia. Colaborou durante vários anos na edição do Anuário Astronômico do Instituto Astronômico e Geofísico da USP. Escreveu dezenas de textos de divulgação e ensino de Astronomia publicados pelo Planetário de São Paulo e em jornais, revistas e outros periódicos de vários lugares do Brasil. Atualmente é professor da Escola Municipal de Astrofísica de São Paulo e ministra a disciplina "Sistema Solar" no curso de Pós-Graduação em Astronomia da Universidade Cruzeiro do Sul.